数理解析研究所講究録
222巻 1974年 9-50

篩の方法からの一問題

日大理工 本橋洋一

「Selbergの篩」を改良する可能性について考察を加えてみたいのであるが，この篩の方法の最も簡明な一次元の場合を例にとってみる： いま $|N|$ 個の整数の集合 N から，Q 以下の素数で割りきれるもの全てを篩い落した残りを $N(Q)$ と書くことにすると，Selbergの篩によれば，大体において

$$(1)\qquad |N(Q)| \leq \frac{|N|}{\log Q} + O(Q^2)$$

という評価が得られる。あるいは，より洗練されたLarge Sieveの方法によれば

$$(2)\qquad |N(Q)| \leq \frac{1}{\log Q}\left(|N| + O(Q^2)\right)$$

とすることも可能である（小林[4]）。いずれにしても，この誤差項 $O(Q^2)$ より明らかなように，このように一般的に考える限り，篩の方法の効果は $Q \leq |N|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ が限界であると察せられる。実際，Selberg[8]は彼の方法を発見すると同時に，その効力の限界を考察し，上記の意味での改良，即ち，

$O(Q^2)$を一般的な条件下で，より小さなものにおきかえることが不可能であることを示した。

しかしながら，Selberg [8] 自身ものべているように，他のなんらかの方法（とりわけ解析的なもの）との組み合せや特殊な条件下では，相当な改良がなされることは不可能であるとは言いきれない。そのような著しい例としては，旧来は2次元の篩の問題としてあつかわれていたGoldbach予想（[9]を参照）が，Rényi（レーニィ）[7]，Barban [1]，A.I. Vinogradov [10]，Bombieri [3]らにより完成の域に達した平均素数定理により，一次元の篩に還元され長足の進歩がなされたことを挙げることが出来る。更にまた，最近の筆者の研究 [5] [6] によれば，応用上も極めて重要なBrun–Titchmarsh型定理の場合にも，解析的な手法により，Selbergの篩を相当に改良できることが明らかになって来ている。その結果の一つを再記すれば：

$$\pi(x;q,l) \le 2\frac{x}{\varphi(q)\log\frac{x}{\sqrt{q}}}\left(1+O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right)$$

なる不等式が $q \le x^{\frac{2}{5}}$ の場合は全ての l について，又，$q \le x^{1-\varepsilon}$ の場合は殆んど全ての $l \bmod q$ について，成立する。これはそれぞれの変域において (1)の形の誤差項が $O(Q^2/\sqrt{q})$ と改良されることに他ならない。

このようにして，特殊な且つ有用な場合に，Selbergの篩を

改良することはかなりに希望を持てる段階に達していると感ぜられるのであるが，ここでは，更に Barban-Vehov [2] の研究を取り上げ，視界を広げたいと思う。彼らは，より極端な場合を考察したのである。即ち，(1)において $|N|/\log Q$ にかかる係数を犠牲にして，誤差項 $O(Q^2)$ が全く現れない場合を発見したのである。結果は，

定理

$$\lambda_d = \begin{cases} \mu(d) & d \le z \\ \mu(d)\dfrac{\log z^2/d}{\log z} & z \le d \le z^2 \end{cases}$$

とすると，任意の $x \ge 1$ に対して，不等式

$$\sum_{1 \le n \le x} \Big(\sum_{\substack{d|n \\ d \le z^2}} \lambda_d \Big)^2 \ll \frac{x}{\log z}$$

が成立する。

Selberg の方法は，このような2乗和を効果的に評価することなのであるから，上記のように篩の結果として取ることもより訣である。勿論，篩の結果自体としては，これら何ら新しい知見を加えるものではないが，その方法にある種の可能性が秘められていると感ぜられるのである。以下にこの定理の証明を行うが，Barban-Vehov のものとは細部においてかな

りの差異がある。ここに，わざわざ，出来得る限り明瞭な計算を行うのは，これが篩の方法の改良の方向を示している重要な考察であるという理由の他に，解析的整数論への入門者にとって，Riemann zeta-函数の初歩知識をたしかめる，絶好の計算訓練になると思ったからでもある。

以下証明.

1)　まず

$$\sum_{n\le x}\Big(\sum_{\substack{d|n\\ d\le z^2}}\lambda_d\Big)^2 \le e\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d|n\\ d\le z^2}}\lambda_d\Big)^2 e^{-\frac{n}{x}}$$

に注意して，この右辺の無限和を $S(x)$ と書けば，Mellin 変換を用いて

$$S(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} x^s\Gamma(s)\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Big(\sum_{\substack{d|n\\ d\le z^2}}\lambda_d\Big)^2\Big\}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} x^s\Gamma(s)F(s)\,ds.$$

この $F(s)$ は $\mathrm{Re}(s)=\sigma>1$ のとき，容易にわかるように，

$$F(s)=\zeta(s)\sum_{d_1,d_2\le z^2}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]^s}\qquad([d_1,d_2]：最小公倍数)$$

$$=\zeta(s)f(s)$$ ，とする。

そこで

$$S(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} x^s\Gamma(s)\zeta(s)(f(s)-f(1))\,ds \;+\; \frac{f(1)}{2\pi i}\int_{(2)} x^s\Gamma(s)\zeta(s)\,ds$$

と書けるが，才1の積分においては，積分路を $\mathrm{Re}\, s=1$ にうつせる（$s=1$ で被積分函数は正則）。又，才2の積分は明らかに $O(x)$。従って，

$$S(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} x^s\Gamma(s)\zeta(s)(f(s)-f(1))\,ds \;+\; O(x|f(1)|).$$

2）以下数節にわたって $f(1)$ の評価を行う。

(δ, d) は最大公約数を示すとして，

$$f(1)=\sum_{d_1,d_2\le z^2}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]}=\sum_{d\le z^2}\frac{\lambda_d}{d}\sum_{\delta\le z^2}\frac{\lambda_\delta}{\delta}(\delta,d)$$

$$=\sum_{d\le z^2}\frac{\lambda_d}{d}g(d)\text{ ，と書く．}$$

所で，λ_d の定義と，簡単な留数計算で

$$g(d)=\frac{1}{2\pi i\log z}\int_{(2)}\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2}\left\{\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{\mu(\delta)}{\delta^{1+w}}(\delta,d)\right\}dw.$$

しかるに $\mathrm{Re}\, w>0$ において

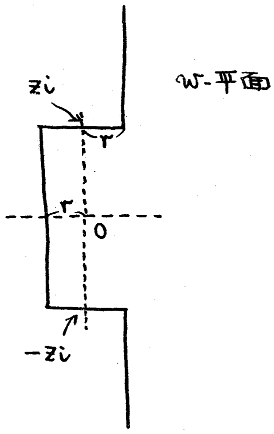
$$\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{\mu(\delta)}{\delta^{1+w}}(\delta,d)=\prod_{p\nmid d}\left(1-\frac{1}{p^{1+w}}\right)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p^{w}}\right)$$

$$= \frac{1}{\zeta(1+w)} \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}}.$$

よって

$$g(d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}}\, dw.$$

ここで積分路を図のように移す.



但し

$$r = \frac{c_0}{\log z}$$ （c_0：適当に取った絶対正常数）

$w = 0$ において被積分函数は正則であり，且つ zeta-函数の理論から，

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \ll \log(|t|+2), \quad \sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log(|t|+2)}$$

であるから，上記の積分路上において，

$$|z^{2w} - z^w| \ll 1, \quad \left| \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} \right| \ll z^{\varepsilon}$$

に注意して，

$$\left|\int_{-r\pm zi}^{+r\pm zi} \frac{z^{2w}-z^{w}}{w^{2}\zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^{w}}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}}\,dw\right| \ll \frac{z^{\varepsilon}}{z^{2}} \qquad \text{（複号同順）}$$

又， $\mathrm{Re}\,w = r$ において

$$\left|\frac{1}{\zeta(1+w)}\right| \ll \frac{1}{r} \ll \log z \quad , \ |z^{2w}-z^{w}| \ll 1 \ , \quad \left|\prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^{w}}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}}\right| \ll z^{\varepsilon}$$

従って

$$\left|\int_{r\pm zi}^{r\pm\infty i} \frac{z^{2w}-z^{w}}{w^{2}\zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^{w}}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}}\,dw\right| \ll z^{\varepsilon}\log z \int_{r\pm zi}^{r\pm i\infty} \frac{dw}{|w|^{2}}$$

$$\ll \frac{z^{\varepsilon}}{z}.$$

以上から

$$g(d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w}-z^{w}}{w^{2}\zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^{w}}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}}\,dw + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

3) よって，はじめにもどって

$$f(1) = \sum_{d\le z^{2}} \frac{\lambda_d}{d}\, g(d)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w}-z^{w}}{w^{2}\zeta(1+w)} \left\{ \sum_{d\le z^{2}} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^{w}}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}} \right\} dw \ +$$

$$+ \ O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right).$$

次にこの積分の中の和であるが，再びλ_dの定義により，

$$\sum_{d \le z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p \mid d} \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \left\{ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{1+u}} \prod_{p \mid d} \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}} \right\} \frac{z^{2u}-z^u}{u^2}\, du .$$

そしてこの無限和は，$\mathrm{Re}\, u > 0$において，

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{1+u}} \prod_{p \mid d} \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}} = \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p^{1+u}} \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}} \right\}$$

$$= \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p^{1+u}} - \frac{1}{p^{1+u}} \left(\frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{1+w}}} - 1 \right) \right\}$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{1+u}}\right) \prod_p \left(1 - \frac{\frac{1}{p^{1+w}} - \frac{1}{p^w}}{p^{1+u}\left(1-\frac{1}{p^{1+u}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+w}}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{\zeta(1+u)} \prod_p \left\{ 1 + \frac{1-\frac{1}{p}}{p^{1+u+w}\left(1-\frac{1}{p^{1+u}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+w}}\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta(1+u)} \prod_p \left\{ 1 + \frac{1}{p^{1+u+w}} + \frac{1}{p^{1+u+w}} \left(\frac{1-\frac{1}{p}}{\left(1-\frac{1}{p^{1+u}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+w}}\right)} - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta(1+u)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{1+u+w}}\right) \prod_p \left\{ 1 + \frac{1}{(p^{1+u+w}+1)} \left(\frac{1-\frac{1}{p}}{\left(1-\frac{1}{p^{1+u}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+w}}\right)} - 1 \right) \right\}$$

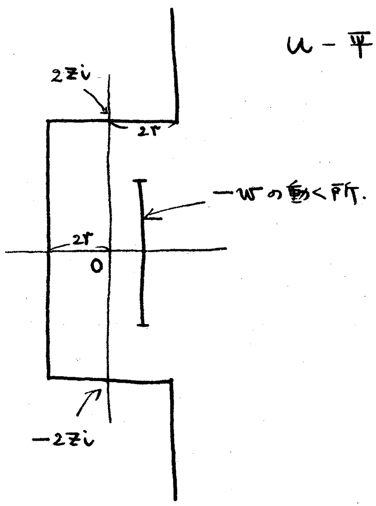
$$= \frac{\zeta(1+u+w)}{\zeta(1+u)} \cdot \frac{1}{\zeta(2(1+u+w))} \prod_p \left\{ 1 + \frac{-p^{1+u+w} + p^{1+w} + p^{1+u} - 1}{(p^{1+u+w}+1)(p^{1+u}-1)(p^{1+w}-1)} \right\}$$

$$= \frac{\zeta(1+u+w)}{\zeta(1+u)} \Phi(u, w),$$ と書く。

容易にわかるように，$\Phi(u, w)$ は $\mathrm{Re}\, u, \mathrm{Re}\, w \geq -\frac{1}{8}$ で正則かつ有界。以上から

$$\sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w)\, du$$

ここで積分路を下図のように移す。



u−平面.

但し $r = \frac{c_0}{\log z}$

$u=0$ では被積分函数は正則.

$u=-w$ で $\zeta(1+u+w)$ は pole をもち，そこでの留数は $\frac{z^{-2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(1-w)} \Phi(-w, w)$

よって，この積分路を $\mathcal{D}_1$ とすれば

$$\sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} = \frac{1}{\log z} \cdot \frac{z^{-2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(1-w)} \Phi(-w, w) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{\mathcal{D}_1} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w)\, du.$$

$\mathrm{Re}\, u = 2r$ のとき $\mathrm{Re}\,(u+w) = r$ であるから，

$$\left| \frac{\zeta(1+u+w)}{\zeta(1+u)} \right| \ll (\log z)^2 .$$

従って上記の積分については，容易に

$$\left| \int_{2r \pm 2zi}^{2r \pm \infty i} \frac{z^{2u} - z^{u}}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w)\, \Phi(u,w)\, du \right| \ll \frac{(\log z)^2}{z} .$$

（複号同順）

又，$\mathrm{Im}\, u = \pm 2z$ においては，$-3r \le \mathrm{Re}\,(u+w) \le r$ 且つ

$z \le |\mathrm{Im}\,(u+w)| \le 3z$ であるから

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+u)} \right| \ll \log z , \qquad |\zeta(1+u+w)| \ll \log z .$$

よって

$$\left| \int_{-2r \pm 2zi}^{2r \pm 2zi} \frac{z^{2u} - z^{u}}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w)\, \Phi(u,w)\, du \right| \ll \frac{\log z}{z^2} .$$

以上から

$$\sum_{d \le z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} = \frac{1}{\log z} \cdot \frac{z^{-2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(1-w)} \Phi(-w, w) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\log z} \int_{-2r - 2zi}^{-2r + 2zi} \frac{z^{2u} - z^{u}}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w)\, \Phi(u,w)\, du + O\left(\frac{\log z}{z}\right).$$

4) そこで前節のはじめにもどって，

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i \log^2 z}\int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{(z^{2w}-z^{w})(z^{-2w}-z^{-w})}{w^4 \zeta(1+w)\zeta(1-w)} \Phi(-w,w)\,dw \; +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i \log z}\int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2} I(w)\,dw \; + \; O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{z\log z}\int_{-r-zi}^{-r+zi} \left|\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2\zeta(1+w)}dw\right|\right).$$

但し，

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i \log z}\int_{-2r-2zi}^{-2r+2zi} \frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2\zeta(1+u)} \zeta(1+u+w)\,\Phi(u,w)\,du.$$

(i) まず

$$I_1 = \int_{-r-zi}^{-r+zi} \left|\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2\zeta(1+w)}dw\right|$$

においては，明らかに

$$\left|\frac{1}{w\,\zeta(1+w)}\right| \ll 1 \quad (\text{有界})$$

であるから

$$I_1 \ll \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{|dw|}{|w|} \ll \int_0^z \frac{d\xi}{(r^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \ll \log z.$$

(ii) 次に $I(w)$ については，$\zeta(s)$ についての更に深いことを用いる。

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_2}{(\log(|t|+2))^{\frac{3}{4}}}$$

において

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll \log(|t|+2), \quad \left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \ll \log(|t|+2)$$

であるから，積分路を $\mathrm{Re}(u) = -\dfrac{c_3}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$ にうつして，簡単な評価により，

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}-2zi}^{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}+2zi} \frac{z^{2u}-z^u}{u^2\zeta(1+u)} \zeta(1+u+w)\Phi(u,w)\,du + O\left(\frac{(\log z)^2}{z^2}\right)$$

従って，

$$|I(w)| \ll \frac{1}{\log z} \cdot \exp\left(-c_3(\log z)^{\frac{1}{4}}\right)(\log z)^2 \int_{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}-2zi}^{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}+2zi} \left|\frac{du}{u^2}\right| + O\left(\frac{(\log z)^2}{z^2}\right)$$

$$\ll \exp\left(-\frac{c_3}{2}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

よって

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i \log z}\int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2} I(w)\,dw$$

については

$$|I_2| \ll \exp\left(-\frac{c_3}{4}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right)$$

を得る。

(iii) 第1の積分については，$(z^{2w}-z^{w})(z^{-2w}-z^{-w})$ という因子がある故，最良の積分路は $\mathrm{Re}\,w=0$ である。又，明らかに $w=0$ では被積分函数は正則である。積分路を $\mathrm{Re}\,w=0$ にうつすと，簡単な評価によって，

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i \log^2 z}\int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{(z^{2w}-z^{w})(z^{-2w}-z^{-w})}{w^4 \zeta(1+w)\zeta(1-w)}\Phi(-w,w)\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi \log^2 z}\int_{-z}^{z} \frac{(z^{2\xi i}-z^{\xi i})(z^{-2\xi i}-z^{-\xi i})}{\xi^4 \zeta(1+i\xi)\zeta(1-i\xi)}\Phi(-\xi i,\xi i)\,d\xi \quad + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

そこで

$$\left|\frac{1}{\xi\,\zeta(1\pm\xi i)}\right| : 有界 \quad , \quad |z^{2\xi i}-z^{\xi i}| \le 2\,\left|\sin\left(\frac{\xi}{2}\log z\right)\right|$$

より，

$$|I_3| \ll \frac{1}{\log^2 z}\int_{-z}^{z}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\xi\log z\right)}{\xi}\right)^2 d\xi \quad + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\ll \frac{1}{\log z}\int_{-z\log z}^{z\log z}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\ll \frac{1}{\log z}.$$

以上 (i), (ii), (iii) をまとめて，目的の

$$|f(1)| \ll \frac{1}{\log z}$$

を得る。

5) そこで 1) にもどって

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} x^s\Gamma(s)\zeta(s)\left(f(s)-f(1)\right)ds + O\left(\frac{x}{\log z}\right).$$

ここで，次のことに注意しよう。 $s=1+it$ のとき

$$|f(s)| \ll (\log z)^4.$$

なぜならば $[d_1, d_2] = d$ の解は明らかに $\tau_3(d)$ 個（d を3つの因子の積で表す方法の数）をこえないから，

$$|f(s)| \le \sum_{d_1, d_2 \le z^2}\frac{1}{[d_1, d_2]} \le \sum_{d \le z^4}\frac{\tau_3(d)}{d} \ll (\log z)^4.$$

更に又，スターリングの公式

$$|\Gamma(\sigma+it)| = \sqrt{2\pi}\,(|t|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\left(1+O\left(\frac{1}{|t|+1}\right)\right)$$

及び

$$|\zeta(1+it)| \ll \log(|t|+2) \qquad (|t|\geq 1)$$

に注意すれば，上記の積分を $|\mathrm{Im}\, s| \leq z$ に制限してもかまわないことが容易にわかる。すなわち，

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-zi}^{1+zi} x^s \Gamma(s)\zeta(s)(f(s)-f(1))\,ds + O\left(\frac{x}{\log z}\right).$$

そこで，以下当分のあいだ $s=1+it$，$|t|\leq z$ としておく。
そして $f(s)$ の計算に入る。

$$f(s) = \sum_{d_1,d_2\leq z^2}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]^s} = \sum_{d\leq z^2}\frac{\lambda_d}{d^s}\sum_{\delta\leq z^2}\frac{\lambda_\delta}{\delta^s}(d,\delta)^s$$

$$= \sum_{d\leq z^2}\frac{\lambda_d}{d^s}g(s,d),$$ と書く。

$f(1)$ の場合と同様に，

$$g(s,d) = \frac{1}{2\pi i \log z}\int_{(2)}\frac{z^{2w}-z^w}{w^2}\left\{\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{\mu(\delta)}{\delta^{s+w}}(d,\delta)^s\right\}dw.$$

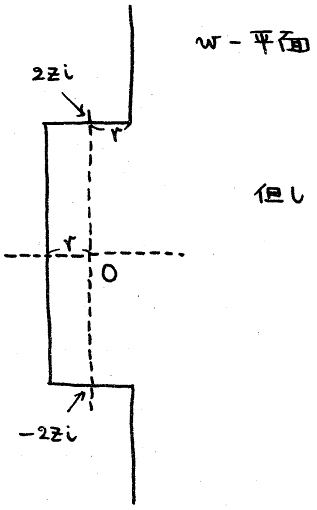
$$\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{\mu(\delta)}{\delta^{s+w}}(d,\delta)^s = \prod_{p\nmid d}\left(1-\frac{1}{p^{s+w}}\right)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p^w}\right)$$

$$= \frac{1}{\zeta(s+w)}\prod_{p\mid d}\frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} \qquad (\mathrm{Re}\, w>0).$$

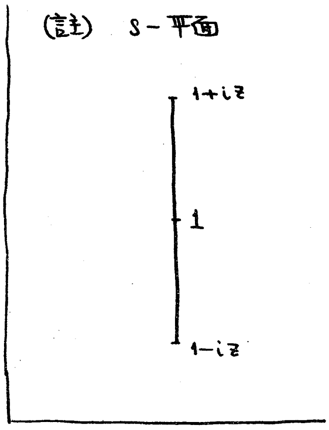
そして，

$$g(s,d)=\frac{1}{2\pi i\log z}\int_{(2)}\frac{z^{2w}-z^{w}}{\zeta(s+w)w^{2}}\prod_{p|d}\frac{1-\frac{1}{p^{w}}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}}\,dw$$

において積分路を下図のように移す。



但し $r=\frac{C_0}{\log z}$



$w=0$ において極がある可能性があるが $d>1$ であれば

$$\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{w}}\right)=(-1)^{\omega(d)}w^{\omega(d)}\prod_{p|d}\log p+O\left(|w|^{\omega(d)+1}\right)$$

($\omega(d)$：dの素因子の数)

が $w\to0$ で成立する故，このときは極はない。又 $d=1$ ならば

$s=1$ の場合は極なし.

$s\neq1$ の場合は極があって留数 $=\frac{\log z}{\zeta(s)}$

しかるに $\frac{1}{\zeta(1)}=0$ であるから，まとめると $w=0$ における留数は

$$\frac{\log z}{\zeta(s)}\sum_{\delta|d}\mu(\delta)$$

とかける。よって，上記の積分路を $\mathfrak{D}_2$ とすれば，

$$g(s,d) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\delta | d} \mu(\delta) + \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{\mathscr{D}} \frac{z^{2w} - z^{w}}{w^{2} \zeta(s+w)} \prod_{p | d} \frac{1 - \frac{1}{p^{w}}}{1 - \frac{1}{p^{s+w}}} \, dw$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\delta | d} \mu(\delta) + \frac{1}{2\pi i \log z} \left\{ \int_{\substack{w \in \mathscr{D}_2 \\ |\mathrm{Im}\, w| \geq 2z}} + \int_{\substack{w \in \mathscr{D}_2 \\ |\mathrm{Im}\, w| < 2z}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\delta | d} \mu(\delta) + G_1(s,d) + G_2(s,d)\,,$$ と分ける。

よって

$$f(s) = \frac{1}{\zeta(s)} + \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} G_1(s,d) + \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} G_2(s,d)$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} + H_1(s) + H_2(s)\,,$$ と書く。

もとにもどれば

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} x^s \Gamma(s) \zeta(s) \left\{ \frac{1}{\zeta(s)} + (H_1(s) - H_1(1)) + (H_2(s) - H_2(1)) \right\} ds + O\left(\frac{x}{\log z}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} x^s \Gamma(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (H_1(s) - H_1(1))\, ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{1-iz}^{1+iz} x^s\,\Gamma(s)\,\zeta(s)\,(H_2(s)-H_2(1))\,ds+O\left(\frac{x}{\log z}\right).$$

はじめの積分は $e^{-\frac{1}{z}}$ であるから問題ないが $H_1(s)$ についてのものはむずかしい。まず $H_2(s)$ についての方をかたずけよう。

6) さて、定義から

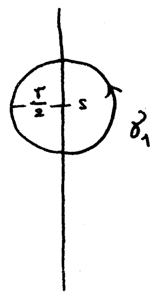
$$H_2(s)-H_2(1)$$

$$=\sum_{d\le z^2}\lambda_d\int_1^s\frac{d}{ds}\left\{\frac{G_2(s,d)}{d^s}\right\}ds.$$

そして、

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{G_2(s,d)}{d^s}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{d\xi}{(\xi-s)^2}\cdot\frac{G_2(\xi,d)}{d^\xi}$$

但し γ_1 は下図の小円.



$s=1+it,\quad r=\frac{c_0}{\log z}$

そこで、$G_2(\xi,d)$ の定義から

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{G_2(s,d)}{d^s}\right\}=\frac{1}{2\pi i\log z}\int_{\substack{w\in\mathscr{S}_2\\|\mathrm{Im}\,w|\ge 2z}}\frac{z^{2w}-z^w}{w^2}\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^w}\right)dw\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{\xi+w}}\right)^{-1}}{d^\xi\,\zeta(\xi+w)(\xi-s)^2}d\xi$$

ここで積分の順序を交換したのであるが，これは次の理由で許される。まず $w \in \mathcal{D}_2$, $\mathrm{Re}\, w = r$ のとき $\mathrm{Re}(\xi + w) \geq 1 + \frac{r}{2}$ より $\left| \frac{1}{\zeta(\xi+w)} \right| \ll \log z$. 又, $w \in \mathcal{D}_2$, $\mathrm{Im}\, w = \pm 2z$ のときは $1 - \frac{3}{2} r \leq \mathrm{Re}(\xi + w) \leq 1 + \frac{3}{2} r$, $z - \frac{r}{2} \leq | \mathrm{Im}(\xi + w) | \leq 3z + \frac{r}{2}$ より $\left| \frac{1}{\zeta(\xi+w)} \right| \ll \log z$. 従って積分は絶対収束。

又，上記の注意から，

$$\left| \oint_{\gamma_1} \frac{\prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{\xi+w}}\right)^{-1}}{d^{\xi}\, \zeta(\xi+w)(\xi - s)^2}\, d\xi \right| \ll \frac{1}{d} \log^2 z \left| \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{1+\frac{r}{2}}}\right)^{-1} \right|$$

$$\ll \frac{1}{d} \log^3 z.$$

よって

$$\left| \frac{d}{ds} \left\{ \frac{G_2(s,d)}{d^s} \right\} \right| \ll \frac{1}{d} \log^2 z \int_{\substack{w \in \mathcal{D}_2 \\ |\mathrm{Im}\, w| \geq 2z}} \left| \frac{z^{2w} - z^{w}}{w^2} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right) dw \right|$$

$$\ll \frac{d^{\varepsilon}}{d} \int_{\substack{w \in \mathcal{D}_2 \\ |\mathrm{Im}\, w| \geq 2z}} \left| \frac{dw}{w^2} \right| \ll \frac{z^{\varepsilon}}{dz}$$

が s について一様に成立する。すなわち，はじめにもどって

$$|H_2(s) - H_2(1)| \ll |s-1| \frac{z^{\varepsilon}}{z} \sum_{d \leq z^2} \frac{1}{d}$$

$$\ll \frac{|s-1|}{\sqrt{z}}.$$

よって $$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (H_2(s) - H_2(1))\, ds \right|$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{z}} \int_{1-iz}^{1+iz} \left| (s-1)\zeta(s)\, x^s \Gamma(s)\, ds \right| \ll \frac{x}{\sqrt{z}}$$

$$\ll \frac{x}{\log z} .$$

て) これから $H_1(s)$ の計算に入る。

λ_d の定義から

$$H_1(s) = \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} G_1(d,s)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(s+w)} dw \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p|d} \left(\frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} \right)$$

において,

$$\sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p|d} \left(\frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \left\{ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{s+u}} \prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} \right\} \frac{z_0^{2u} - z^u}{u^2} du .$$

そして, $\mathrm{Re}\, u > 0$ のとき,

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{s+u}} \prod_{p|d} \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} = \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p^{s+u}} \cdot \frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} \right\}$$

$$= \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p^{s+u}} - \frac{1}{p^{s+u}} \left(\frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}} - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s+u)} \prod_p \left\{ 1 - \frac{\dfrac{1}{p^{s+w}} - \dfrac{1}{p^w}}{p^{s+u}\left(1-\dfrac{1}{p^{s+u}}\right)\left(1-\dfrac{1}{p^{s+w}}\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s+u)} \prod_p \left\{ 1 + \frac{1}{p^{s+u+w}} + \frac{1}{p^{s+u+w}} \left(\frac{1-\dfrac{1}{p^s}}{\left(1-\dfrac{1}{p^{s+u}}\right)\left(1-\dfrac{1}{p^{s+w}}\right)} - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{1}{\zeta(2(s+u+w))} \prod_p \left\{ 1 + \frac{-p^{s+u+w} + p^{s+w} + p^{s+u} - 1}{(p^{s+u+w}+1)(p^{s+u}-1)(p^{s+w}-1)} \right\}$$

$$= \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \Phi(s, w, u) \text{ , とする。}$$

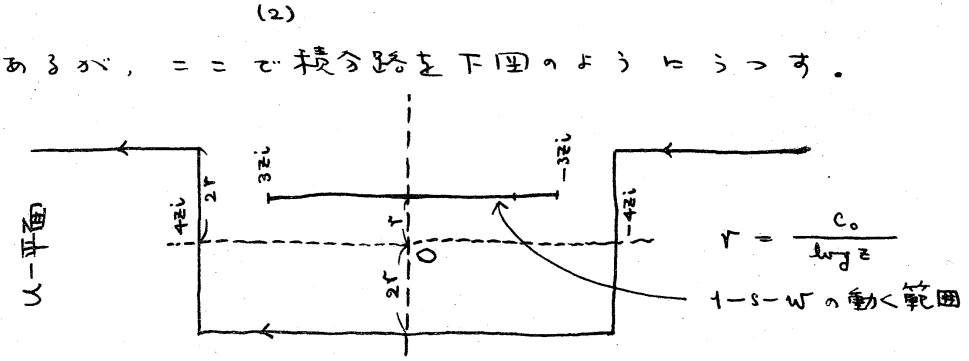
容易にわかるように，$\Phi(s, w, u)$ は $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{7}{8}$; $\mathrm{Re}\, w, \mathrm{Re}\, u \geq -\frac{1}{8}$ で正則かつ有界である。

さて，

$$\sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p \mid d} \left(\frac{1 - \dfrac{1}{p^w}}{1 - \dfrac{1}{p^{s+w}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u)\, du$$

であるが，ここで積分路を下図のようにうつす。



$$-\frac{1}{4\pi^2\log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2\zeta(s+w)}dw\int_{\mathfrak{D}_3}\frac{\zeta(s+w+u)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du$$

$= J_1(s)+J_2(s)+J_3(s)$ ，とおく。

ここで 5), 6) 節と上記をまとめて,

$$S(x)=O\left(\frac{x}{\log z}\right)+\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-iz}^{1+iz}x^s\Gamma(s)\zeta(s)\left(J_j(s)-J_j(1)\right)ds$$

となる。

まず簡単な $J_1(s)$ について評価をしておこう。

$$J_1(1)=0$$

であるが, $\Phi(s,w,0)$ は $\operatorname{Re}s=1$ ならば例えば $\operatorname{Re}w\geq-\frac{1}{4}$ で正則有界であるから, $\operatorname{Re}w=-\frac{1}{4}$ へ積分路を移して評価することにより容易に

$$\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2}\Phi(s,w,0)\,dw=O\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{4}}}\right).$$

よって

$$|J_1(s)-J_1(1)|\ll\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{|\zeta(s)|}.$$

すなわち

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1-iz}^{1+iz}x^s\Gamma(s)\zeta(s)\left(J_1(s)-J_1(1)\right)ds\right|\ll\int_{1-iz}^{1+iz}z^{-\frac{1}{4}}x\,|\Gamma(s)\,ds|$$

$$\ll z^{-\frac{1}{4}}x.$$

極の可能性は $u=0$ と $u=1-s-w$ である。しかるに，これらは一致しない。なぜならば，$\mathrm{Re}(1-s-w)=r$. よってこれらはともに1位の極であり，

$u=0$ における留数：$\dfrac{\zeta(s+w)}{\zeta(s)}\log z\ \Phi(s,w,0)$ （$s=1$ ならば 0）

$u=1-s-w$ における留数：$\dfrac{z^{2(1-s-w)}-z^{1-s-w}}{(1-s-w)^2\zeta(1-w)}\Phi(s,w,1-s-w)$.

よって，上記の積分路を $\mathcal{D}_3$ とすれば，

$$\sum_{d\le z^2}\frac{\lambda_d}{d^s}\prod_{p|d}\left(\frac{1-\frac{1}{p^w}}{1-\frac{1}{p^{s+w}}}\right)$$

$$=\frac{\zeta(s+w)}{\zeta(s)}\Phi(s,w,0)+\frac{1}{\log z}\cdot\frac{z^{2(1-s-w)}-z^{1-s-w}}{(1-s-w)^2\zeta(1-w)}\Phi(s,w,1-s-w)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\log z}\int_{\mathcal{D}_3}\frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^u}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du$$

従って，はじめにもどって

$$H_1(s)=\frac{1}{2\pi i\zeta(s)\log z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{z^{2w}-z^w}{w^2}\Phi(s,w,0)\,dw\ +$$

$$+\frac{1}{2\pi i\log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{(z^{2w}-z^w)}{w^2\zeta(1-w)}\cdot\frac{(z^{2(1-s-w)}-z^{1-s-w})}{(1-s-w)^2\zeta(s+w)}\Phi(s,w,1-s-w)\,dw\ -$$

8) 次に $J_3(s)$ について考える。これを2つにわけて

$$J_3(s) = -\frac{1}{4\pi^2\log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2\zeta(s+w)}\,dw\left\{\int_{\substack{u\in\mathcal{D}_3\\ |\mathrm{Im}\,u|\le 4z}} + \int_{\substack{u\in\mathcal{D}_3\\ |\mathrm{Im}\,u|\ge 4z}}\right\}$$

$$= J_3^{(1)}(s) + J_3^{(2)}(s) \quad \text{とする。}$$

(i) まず $J_3^{(2)}(s)$ について。

$$J_3^{(2)}(s) - J_3^{(2)}(1)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2\log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2}\,dw\int_1^s\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\zeta(s+w)}\int_{\substack{u\in\mathcal{D}_3\\ |\mathrm{Im}\,u|\ge 4z}}\frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du\right\}ds$$

ここで s についての積分は $\mathrm{Re}\,s=1$ 上で考えている。そして

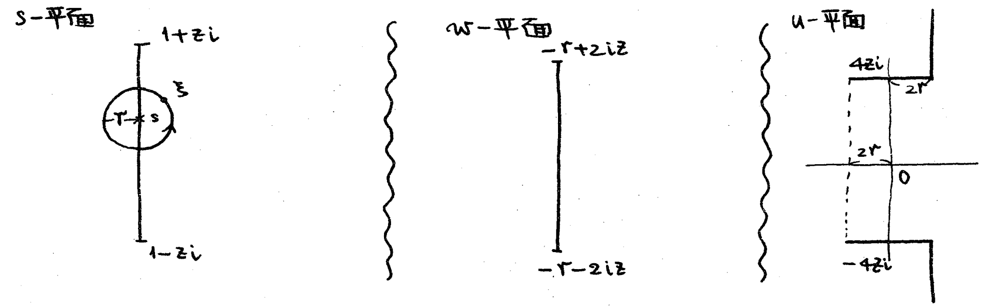
$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\zeta(s+w)}\int_{\substack{u\in\mathcal{D}_3\\ |\mathrm{Im}\,u|\ge 4z}}\frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{d\xi}{(\xi-s)^2\,\zeta(\xi+w)}\int_{\substack{u\in\mathcal{D}_3\\ |\mathrm{Im}\,u|\ge 4z}}\frac{\zeta(\xi+u+w)}{\zeta(\xi+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(\xi,w,u)\,du$$

但し γ_2 は s を中心として半径 $\frac{r}{2}$ $\left(r=\frac{c_0}{\log z}\right)$ の円である。ここで，このように書けることについては，注意しなければならないことがある。いままでは s は $\mathrm{Re}\,s=1$ 上に制限されてき

たのであるが，$\frac{\partial}{\partial s}$ の内側にある函数は，明らかに $\mathrm{Re}\, s \geq 1-r$ で正則である。従って Cauchy の定理を用いてさしつかえないのである。

ここで念のために，s, w, u の現在の値域を示すと



従って，

$\mathrm{Re}\, u = 2r$, $u \in \mathscr{D}_3$ のとき $\mathrm{Re}(\xi+u+w) \geq 1+\frac{r}{2}$ より

$$|\zeta(\xi+u+w)| \ll \log z.$$

$\mathrm{Re}(\xi+u) \geq 1+\frac{3}{2}r$ より

$$\left|\frac{1}{\zeta(\xi+u)}\right| \ll \log z$$

$\mathrm{Re}(\xi+w) \geq 1-\frac{3}{2}r$, $|\mathrm{Im}(\xi+w)| \leq 2z+\frac{r}{2}$ より

$$\left|\frac{1}{\zeta(\xi+w)}\right| \ll \log z.$$

又，$\mathrm{Im}\, u = \pm 4z$, $u \in \mathscr{D}_3$ のときも容易に同様な評価を得る。

よって

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\zeta(s+w)}\int_{\substack{u\in\mathscr{D}_3\\ |\mathrm{Im}\, u|\geq 4z}} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\,\Phi(s,w,u)\,du\right\}\right|$$

$$\ll (\log z)^4 \int\limits_{\substack{u\in \mathcal{D}_3 \\ |\mathrm{Im}\, u|\geq 4z}} \left|\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\,du\right| \ll \frac{(\log z)^4}{z}.$$

これより，

$$|J_3^{(2)}(s) - J_3^{(2)}(1)| \ll |s-1|\frac{\log^2 z}{z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \left|\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2}\,dw\right|$$

$$\ll |s-1|\frac{\log^3 z}{z}.$$

(ii) 次に $J_3^{(1)}(s)$ について考える。

$$J_3^{(1)}(s) - J_3^{(1)}(1)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2\log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\frac{z^{2w}-z^{w}}{w^2}\,dw\int_1^s \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\zeta(s+w)}\int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz}\frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du\right\}ds$$

s は $\mathrm{Re}\, s=1$ 上に制限されている。そして (i) と同じく

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\zeta(s+w)}\int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz}\frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{d\xi}{(\xi-s)^2\,\zeta(\xi+w)}\int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz}\frac{\zeta(\xi+u+w)}{\zeta(\xi+u)}\Phi(\xi,u,w)\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{d\xi}{(\xi-s)^2\zeta(\xi+u)}\, I(\xi, w)\, d\xi$$ とする。

いま $I(\xi, w)$ において，積分路を $\mathrm{Re}\, u = -\dfrac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$ 上へ移してもかまわない。なぜならば，

$\mathrm{Re}\, u = -\dfrac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$ ならば

$$\mathrm{Re}(\xi+u) \geq 1 - \frac{r}{2} - C_4\frac{1}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} \geq 1 - 2\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$$

(z: 充分大)

$$\mathrm{Re}(\xi+u+w) \geq 1 - \frac{3}{2}r - C_4\frac{1}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} \geq 1 - 2\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$$

又，$|\mathrm{Im}(\xi+u)| \leq 5z + \dfrac{r}{2}$， $|\mathrm{Im}(\xi+u+w)| \leq 7z + \dfrac{r}{2}$.

よって，

$$\left|\frac{1}{\zeta(\xi+u)}\right| \ll \log z, \quad |\zeta(\xi+u+w)| \ll \log z.$$

すなわち，簡単な評価により，$\mathrm{Im}\, u = \pm 4z$ からの誤差をつけて

$$I(\xi, w) = \int_{-\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} - 4iz}^{-\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} + 4iz} \frac{\zeta(\xi+u+w)}{\zeta(\xi+u)}\, \Phi(\xi, u, w)\, \frac{z^{2u} - z^{u}}{u^2}\, du + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

となる。これより上に注意したことから，

$$|I(\xi, w)| \ll (\log z)^2 \exp\left(-C_4 (\log z)^{\frac{1}{4}}\right) \int_{-C_4(\log z)^{-\frac{3}{4}} - 4iz}^{-C_4(\log z)^{-\frac{3}{4}} + 4iz} \left|\frac{du}{u^2}\right| + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\ll \exp\left(-\frac{C_4}{2}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

更に又，　$\left|\dfrac{1}{\zeta(s+w)}\right| \ll \log z$ であるから，結局

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\zeta(s+w)}\int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz}\frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)}\cdot\frac{z^{2u}-z^{u}}{u^2}\Phi(s,w,u)\,du\right\}\right|$$

$$\ll \log^2 z \ \exp\left(-\frac{c_4}{2}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right)$$

となり，

$$\left|J_3^{(1)}(s)-J_3^{(1)}(1)\right| \ll |s-1|\exp\left(-\frac{c_4}{2}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right)\int_{-r-2iz}^{-r+2iz}\left|\frac{dw}{w^2}\right|$$

$$\ll |s-1|\exp\left(-\frac{c_4}{4}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

以上(i)，(ii)をまとめて，

$$|J_3(s)-J_3(1)| \ll |s-1|\exp\left(-\frac{c_4}{4}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

従って

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1-iz}^{1+iz}(J_3(z)-J_3(1))\,x^s\,\Gamma(s)\zeta(s)\,ds\right|$$

$$\ll x\exp\left(-\frac{c_4}{4}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right)\int_{1-iz}^{1+iz}|(s-1)\zeta(s)\Gamma(s)|\,|ds|$$

$$\ll x\exp\left(-\frac{c_4}{4}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

9)　7)及び8)節の結果をまとめて

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{1-iz}^{1+iz} \left(J_2(s) - J_2(1)\right) x^s P(s)\zeta(s)\,ds$$

となり，問題は，この積分の評価に帰着した。この $J_2(s)$ についての部分が最も困難である。もう一度書いておくと，

$$J_2(s) = \frac{1}{2\pi i \log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{(z^{2w} - z^{w})(z^{2(1-s-w)} - z^{1-s-w})}{(1-s-w)^2 w^2 \zeta(1-w)\zeta(s+w)}\Phi(s, w, 1-s-w)\,dw$$

この表現から見えるように，$J_2(s)$ は

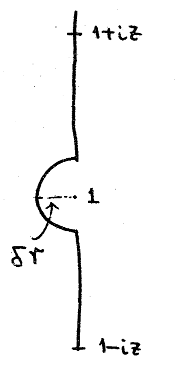
$$\mathrm{Re}(s) \geq 1 - \frac{c_0}{\log z}, \qquad |\mathrm{Im}(s)| \leq z$$

で正則である。よって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-iz}^{1+iz} \left(J_2(s) - J_2(1)\right) x^s P(s)\zeta(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{D}_0} \left(J_2(s) - J_2(1)\right) x^s P(s)\zeta(s)\,ds$$

但し，$\mathscr{D}_0$ は下図の積分路である。



$$r = \frac{c_0}{\log z}$$

δ: 充分小.

まず $J_2(1)$ については，すでに $f(1)$ の計算（4）節の(iii)）で示したように

$$|J_2(1)| \ll \frac{1}{\log z}$$

従って，容易にわかるように

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{D}_0} J_2(1)\, x^s \zeta(s)\Gamma(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iz}^{\frac{1}{2}+iz} J_2(1)\, x^s \zeta(s)\Gamma(s)\, ds \quad \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\sigma=\frac{1}{2}\\ \mathrm{Im}(s)=\pm z}}^{\sigma=1} x^s \zeta(s)\Gamma(s) J_2(1)\, ds$$

より

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{D}_0} J_2(1)\, x^s \zeta(s)\Gamma(s)\, ds\right| \ll \frac{x}{\log z}.$$

よって

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{D}_0} J_2(s)\, x^s \zeta(s)\Gamma(s)\, ds$$

10) 次に $s \in \mathscr{D}_0$　$s = 1+it$　$|t| \geq 1$ の場合を考えよう。

$$J_2(s) = J_2(1+it)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log^2 z}\int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{(z^{2w}-z^{w})(z^{-2(it+w)}-z^{-(it+w)})}{(w+it)^2 w^2 \zeta(1-w)\zeta(w+1+it)}\, \Phi(1+it, w, -it-w)\, dw$$

であるが，積分路を $\mathrm{Re}\,w=0$ 上に移せば，簡単な評価で，

$\mathrm{Im}\,w=\pm 2z$ から出る誤差をつけて，

$$J_z(1+it)$$
$$=\frac{1}{2\pi\log^2 z}\int_{-2z}^{2z}\frac{z^{-2i(v+t)}-z^{-i(v+t)}}{(v+t)^2\zeta(1+i(v+t))}\cdot\frac{z^{2vi}-z^{vi}}{v^2\zeta(1-iv)}\Phi(1+it,vi,-i(t+v))\,dv+$$
$$+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

よって

$$|J_z(1+it)|\ll\frac{1}{\log^2 z}\int_{-2z}^{2z}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(v+t)\log z\right)}{v+t}\right|\cdot\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}v\log z\right)}{v}\right|dv+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

そこで $t\geq 1$ であれば，

$$|J_z(1+it)|$$
$$\ll\frac{1}{\log^2 z}\left\{\int_{-2z}^{-t-\frac{1}{\log z}}+\int_{-t-\frac{1}{\log z}}^{-t+\frac{1}{\log z}}+\int_{-t+\frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}}+\int_{-\frac{1}{\log z}}^{\frac{1}{\log z}}+\int_{\frac{1}{\log z}}^{2z}\right\}+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

と分割することにより評価すれば，

$$\left|\int_{-2z}^{-t-\frac{1}{\log z}}\right|\ll\int_{-2z}^{-t+\frac{1}{\log z}}\frac{dv}{|v(v+t)|}\ll\frac{1}{t}\left\{\int_{-2z}^{-t-\frac{1}{\log z}}\frac{dv}{|v|}+\int_{-2z}^{-t-\frac{1}{\log z}}\frac{dv}{|v+t|}\right\}$$
$$\ll\frac{1}{t}\log z\,.$$

$-t+\frac{1}{\log z}\geq v\geq -t-\frac{1}{\log z}$ ならば $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(v+t)\log z\right)}{v+t}\right|\ll\log z$

であるから，

$$\int_{-t-\frac{1}{\log z}}^{-t+\frac{1}{\log z}} \ll \log z \int_{-t-\frac{1}{\log z}}^{-t+\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v|} \ll \frac{1}{t}.$$

又，

$$\int_{-t+\frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} \ll \frac{1}{t}\left\{\int_{-t+\frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v|} + \int_{-t+\frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v+t|}\right\} \ll \frac{1}{t}\log z.$$

$-\frac{1}{\log z} \leq v \leq \log z$ の場合は $\left|\frac{\sin(\frac{1}{2}v\log z)}{v}\right| \ll \log z$ であるから，

$$\int_{-\frac{1}{\log z}}^{\frac{1}{\log z}} \ll \log z \int_{\frac{1}{\log z}}^{\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v+t|} \ll \frac{1}{t}.$$

更に又，

$$\int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \ll \frac{1}{t}\left\{\int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \frac{dv}{v} + \int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \frac{dv}{v+t}\right\} \ll \frac{\log z}{t}.$$

以上をまとめると， $t \geq 1$ のとき

$$|J_2(1+it)| \ll \frac{1}{t\log z}.$$

又，明らかに同じ不等式が $t \leq -1$ についても成立する。

よって

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\mathcal{D}_0 \\ |\mathrm{Im}\, s| \geq 1}} J_2(s)\, x^s \zeta(s)\Gamma(s)\, ds\right|$$

$$\ll \frac{x}{\log^2 z}\int_1^z \frac{1}{t}\left|\zeta(1+it)\Gamma(1+it)\right| dt$$

$$\ll \frac{x}{\log z}.$$

11) 従って

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\mathcal{D}_0 \\ |\mathrm{Im}\, s|\le 1}} x^s \zeta(s)\Gamma(s)J_z(s)\,ds + O\left(\frac{x}{\log z}\right).$$

さて，$|\mathrm{Im}\, s| \le 1$ のときは，まず積分路を $\mathrm{Re}\, w = 0$ へうつして

$$J_z(s) = -\frac{1}{2\pi\log^2 z}\int_{-2z}^{2z} \frac{(z^{2vi} - z^{vi})(z^{2(1-s-iv)} - z^{1-s-iv})}{(1-s-iv)^2 v^2 \zeta(1-iv)\zeta(s+iv)}\Phi(s, iv, 1-s-iv)\,dv + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi\log^2 z}\left\{\int_2^{2z} + \int_{-2}^{2} + \int_{-2z}^{-2}\right\} + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

とわける。まず $|v| \ge 2$ に対応する2つの積分については，容易に

$$\left|\int_2^{2z}\right|, \left|\int_{-2z}^{-2}\right| \ll \int_2^{2z}\frac{1}{|v^2\zeta(1-iv)|}\cdot\frac{1}{|1-s-iv|^2|\zeta(s+iv)|}\,dv$$

$$\ll \int_2^{2z}\frac{\log(v+1)}{v^2}\cdot\frac{\log(v+1)}{v^2+|1-s|^2}\,dv \ll 1.$$

よって　$|\mathrm{Im}\, s| \leq 1$　ならば

$$J_2(s) = -\frac{1}{2\pi \log^2 z} \int_{-2}^{2} \frac{(z^{2vi} - z^{vi})(z^{2(1-s-iv)} - z^{1-s-iv})}{(1-s-iv)^2 v^2 \zeta(1-iv)\zeta(s+iv)} \Phi(s, iv, 1-s-iv)\, dv +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$

$$= L(s) + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$, とおく。

すると，

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |\mathrm{Im}\, s| \leq 1}} L(s) x^s \zeta(s) \Gamma(s)\, ds +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^2 z} \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |\mathrm{Im}\, s| \leq 1}} |x^s \zeta(s) \Gamma(s)\, ds|\right).$$

しかるに，$|\zeta(s)| \ll \frac{1}{|s-1|}$　$(|s| \leq 1)$　であるから，

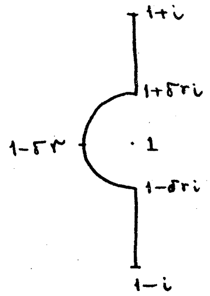
$$\int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |\mathrm{Im}\, s| \leq 1}} |x^s \zeta(s) \Gamma(s)\, ds| \ll x \left\{ \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |s-1| \leq \delta r}} \frac{|ds|}{|s-1|} + \int_{\delta r}^{1} \frac{dt}{t} \right\}$$

$$\ll x \log\log z .$$

よって

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |\mathrm{Im}\, s| \leq 1}} L(s) x^s \zeta(s) \Gamma(s)\, ds.$$

12)　所で，現在 s は，下図の範囲にある訳であるが，



ここで s を半円部分に制限すると

$$|L(s)| \ll \frac{1}{\log^2 z}\int_{-2}^{2}\left|\frac{z^{2iv}-z^{iv}}{v^2\zeta(1-iv)}\right|\left|\frac{z^{2(1-s-iv)}-z^{1-s-iv}}{(1-s-iv)^2\zeta(s+iv)}\right|dv$$

となり

$$\left|\frac{1}{v\,\zeta(1-iv)}\right|,\quad \left|\frac{1}{(1-s-iv)\zeta(s+iv)}\right|$$

は共に有界。よって

$$|L(s)| \ll \frac{1}{\log^2 z}\int_{-2}^{2}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}v\log z\right)}{v}\right|\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(i(s-1)+v)\log z\right)}{1-s-iv}\right|dv$$

$$\ll \frac{1}{\log z}\int_{-2\log z}^{2\log z}\left|\frac{\sin\left(\xi+\frac{1}{2}(1-s)i\log z\right)}{\xi-\frac{1}{2}(1-s)i\log z}\right|d\xi .$$

しかるに

$$|(s-1)\log z| = \delta c_0 \qquad (\delta:\text{充分小})$$

であるから

$|\xi| \le \delta c_0$ のとき被積分函数は有界

又，$|\xi| > \delta c_0$ のときは，

$$\left|\frac{1}{2}(1-s)i\log z-\xi\right|\geq\frac{|\xi|}{2}\quad,\ |\sin(\xi+\tfrac{1}{2}i(1-s)\log z)|\ll 1$$

より

$$\int_{|\xi|>\delta c_0}\ll\int_{|\xi|\geq\delta c_0}\frac{d\xi}{|\xi|^2}\ll 1.$$

すなわち，$s\in\mathcal{D}_0$，$|1-s|=\delta r$ のとき

$$|L(s)|\ll\frac{1}{\log z}$$

である。よって

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{s\in\mathcal{D}_0\\|1-s|=\delta r}}L(s)x^s\zeta(s)\Gamma(s)\,ds\right|$$

$$\ll\frac{x}{\log z}\int_{|s-1|=\delta r}\frac{|ds|}{|s-1|}\ll\frac{x}{\log z}.$$

以上から

$$S(x)=O\left(\frac{x}{\log z}\right)+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{1+\delta ri}^{1+i}+\int_{1-i}^{1-\delta ri}\right\}x^s\zeta(s)L(s)\Gamma(s)\,ds$$

となった訳である。

13) さて，$|\zeta(1+it)|\ll\dfrac{1}{|t|}$ $\quad 0<|t|\leq 1$ に注意して，

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\delta r}^{1+i}x^s\zeta(s)L(s)\Gamma(s)\,ds\right|$$

$$\ll x \int_{\delta r}^{1} \frac{|L(1+it)|}{t} dt ,$$

であるが，

$$|L(1+it)| \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^{2} \left| \frac{z^{2iv} - z^{iv}}{v^2 \zeta(1-iv)} \right| \left| \frac{z^{2i(t+v)} - z^{i(t+v)}}{(t+v)^2 \zeta(1+i(t+v))} \right| dv$$

$$\ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^{2} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2} v \log z\right)}{v} \right| \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(t+v)\log z\right)}{t+v} \right| dv$$

$$= \frac{1}{\log^2 z} \left\{ \int_{-2}^{-t-\frac{\delta r}{2}} + \int_{-t-\frac{\delta r}{2}}^{-t+\frac{\delta}{2}r} + \int_{-t+\frac{\delta}{2}r}^{-\frac{\delta}{2}r} + \int_{-\frac{\delta}{2}r}^{\frac{\delta}{2}r} + \int_{\frac{\delta}{2}r}^{2} \right\}$$

$$= W_1(t) + W_2(t) + W_3(t) + W_4(t) + W_5(t)$$

と分割して評価する。

(i) $W_2(t)$ においては $\left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(t+v)\log z\right)}{t+v} \right| \ll \log z$ であり且つ $|v| \geq \frac{t}{2}$ であるから

$$W_2(t) \ll \frac{1}{t \log z} \int_{-t-\frac{\delta r}{2}}^{-t+\frac{\delta}{2}r} dv \ll \frac{1}{t \log^2 z} .$$

よって

$$\int_{\delta r}^{1} \frac{W_2(t)}{t} dt \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{\delta r}^{1} \frac{dt}{t^2} \ll \frac{1}{\log z}$$

$W_4(t)$ についても全く同様にして

$$\int_{\delta r}^{1} \frac{W_4(t)}{t}\,dt \ll \frac{1}{\log z}.$$

(ii) $W_3(t)$ については，

$$W_3(t) \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-t+\frac{\delta}{2}r}^{-\frac{\delta}{2}r} \frac{dv}{|v(t+v)|}$$

$$= \frac{1}{\log z} \int_{-t\log z+\frac{\delta}{2}c_0}^{-\frac{\delta}{2}c_0} \frac{d\xi}{|\xi(t\log z+\xi)|} \qquad \left(\because\ r = \frac{c_0}{\log z}\right)$$

$$= \frac{1}{t\log^2 z} \int_{-\frac{t}{2}\log z+\frac{\delta}{2}c_0}^{\frac{t}{2}\log z-\frac{\delta}{2}c_0} \left| \frac{1}{\xi-\frac{t}{2}\log z} - \frac{1}{\xi+\frac{t}{2}\log z} \right| d\xi$$

$$\ll \frac{1}{t\log^2 z} \int_{\frac{\delta}{2}c_0}^{t\log z-\frac{\delta}{2}c_0} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\ll \frac{1}{t\log^2 z} \left\{ |\log(t\log z)| + O(1) \right\}.$$

よって

$$\int_{\delta r}^{1} \frac{W_3(t)}{t}\,dt \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{\delta r}^{1} \frac{|\log(t\log z)|+1}{t^2}\,dt$$

$$\ll \frac{1}{\log z} \int_{\delta c_0}^{\log z} \frac{|\log \xi| + c}{\xi^2}\, d\xi \ll \frac{1}{\log z}.$$

(iii) 次に $W_1(t)$ については,

$$W_1(t) \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^{-t-\frac{\delta}{2}r} \frac{dv}{|v(t+v)|}$$

$$= \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \le j \ll \log z} \int_{-t-\frac{\delta}{2}r(j+1)}^{-t-\frac{\delta}{2}rj} \frac{dv}{|v(t+v)|}$$

$$\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \le j \ll \log z} \frac{1}{rj} \int_{-t-\frac{\delta}{2}r(j+1)}^{-t-\frac{\delta}{2}rj} \frac{dv}{|v|}$$

$$\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \le j \ll \log z} \frac{1}{rj} \cdot \frac{r}{t+\frac{\delta}{2}rj} = \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \le j \ll \log z} \frac{1}{j(t+\frac{\delta}{2}rj)}.$$

よって

$$\int_{\delta r}^{1} \frac{W_1(t)}{t}\, dt \ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \le j \ll \log z} \frac{1}{j} \int_{\delta r}^{1} \frac{dt}{t(t+\frac{\delta}{2}rj)}$$

$$\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \le j \ll \log z} \frac{1}{j} \int_{\delta c_0}^{\log z} \frac{d\xi}{\xi\,(\xi + \frac{c_0\delta}{2} j)}$$

ここで

$$\int_{\delta c_0}^{\log z} \frac{d\xi}{\xi\,(\xi + \frac{c_0\delta}{2} j)} = \int_{\delta c_0}^{j} + \int_{j}^{\log z}$$

48

$$\ll \frac{1}{j}\int_{\delta c_0}^{j}\frac{d\xi}{\xi} + \int_{j}^{\log z}\frac{d\xi}{\xi^2} \ll \frac{\log(j+1)}{j}$$

により

$$\int_{\delta r}^{1}\frac{W_1(t)}{t}dt \ll \frac{1}{\log z}\sum_{j}\frac{\log(j+1)}{j^2}$$

$$\ll \frac{1}{\log z}.$$

全く同様にして

$$\int_{\delta r}^{1}\frac{W_5(t)}{t}dt \ll \frac{1}{\log z}$$

も確かめられる。

以上 (i), (ii), (iii) より

$$\int_{\delta r}^{1}\frac{|L(1+it)|}{t}dt \ll \frac{1}{\log z}.$$

これは、本節のはじめに示したことから

$$S(x) \ll \frac{x}{\log z}$$

を意味する。

証明終り.

あとがきにかえて，次の問題を提出しておく。

問題

定理を算術級数の場合に拡張せよ。

もしも，これが最も理想的な形で解決されたならば，L-函数のゼロ点密度についてのLinnikの定理が次のように改良されるであろう。

$$\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma, T, \chi) \ll q^{(\frac{9}{4}+\varepsilon)(1-\sigma)} \qquad (T \ll 1).$$

参考文献

[1] M.B. Barban : The large sieve method and its applications in the theory of numbers. Russian Math. Surveys, 21 (1966), 49–103.

[2] M.B. Barban and P.P. Vehov : On an extremal problem, Trans. Moscow Math. Soc., 18 (1968), 91–99.

[3] E. Bombieri : On the large sieve. Mathematika, 12 (1965), 201–225.

[4] I. Kobayashi : A note on the Selberg sieve and the large sieve, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 1–5.

[5] Y. Motohashi : On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem. J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 306–323.

[6] Y. Motohashi : On some improvements of the Brun-Titchmarsh Theorem, II. 数理解析研究所講究録 193 号 (1973).

[7] A. Rényi : On the representation of an even number as the sum of a prime and an almost prime. A.M.S. Transl. (2) 19 (1962), 299-321.

[8] A. Selberg : The general sieve-method and its place in prime number theory. Proc. Int. Math. Congr. 1950, Vol. I, 286-292.

[9] 内山三郎 : Goldbach-Rényi の定理について. 数理解析研究所講究録 84 号 (1970).

[10] A. I. Vinogradov : On the density hypothesis for Dirichlet L-functions. Izv. Akad. Nauk SSSR. SM., 29 (1965), 903-934.

— Summary —

A complete proof is given to the somewhat ambiguous claim of Barban-Vehov [2], which seems to throw light on the further improvement of the Selberg sieve. At the end of paper the problem to find the analogue in the case of arithmetic progressions is set out, and its connection with the density theorem of Linnik is suggested.

Y. MOTOHASHI
Nihon Univ., Tokyo.